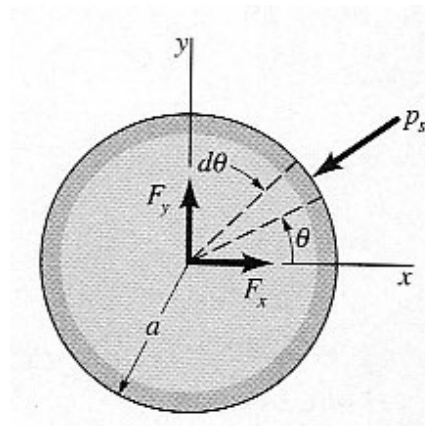
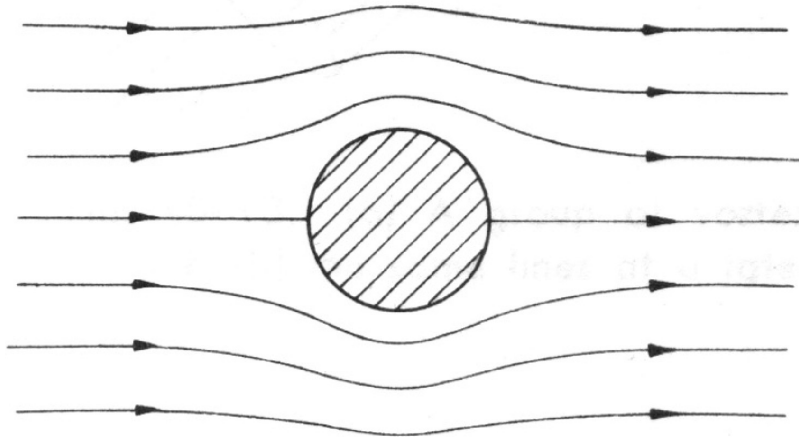


Semaine 3:
Dynamique des fluides visqueux

Les limites de l'équation de Bernoulli:

Le paradoxe de D'Alembert pour un cylindre infini

Si nous supposons que la loi de Bernoulli est strictement valable (voire «Dynamique des fluides parfait»):



Force de trainée (Drag):

$$F_t = F_x = - \int_0^{2\pi} P(a, \theta) \cos \theta a d\theta = 0$$

Si l'équation de Bernoulli est strictement valable $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F_t = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ pas de résistance à l'avancement du solide dans le fluide (paradoxe de D'Alembert)!

Les limites de l'équation de Bernoulli:

Le paradoxe de D'Alembert pour un cylindre infini

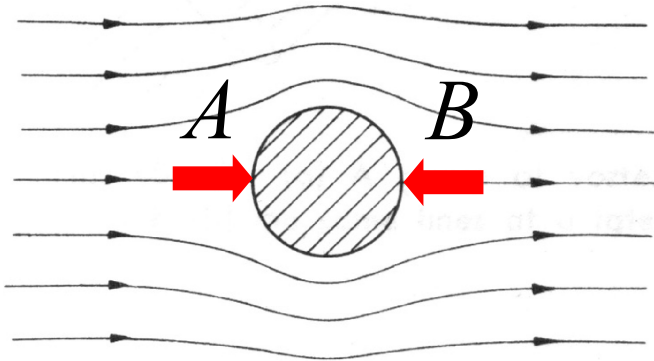
Dans la réalité $\eta \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ l'équation de Bernoulli n'est pas valable et $F_t \neq 0 \Rightarrow$

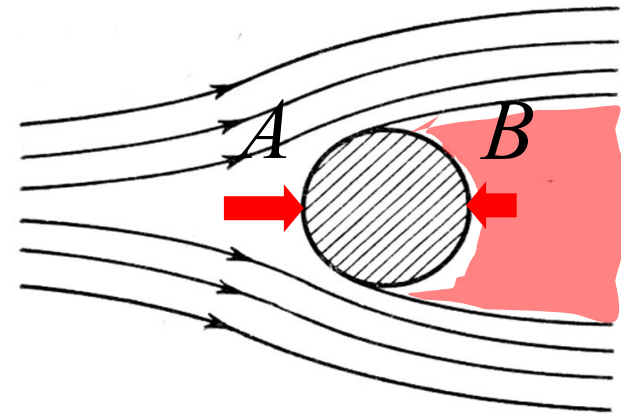
$\Rightarrow$ résistance à l'avancement du solide dans le fluide

$$P_A = P_B$$

$$F_A = F_B$$



$$\eta = 0$$



$$\eta \neq 0$$

$$P_A > P_B$$

$$F_A > F_B$$

Les limites de l'équation de Bernoulli:

Aile d'avion

Pour un profil générique se déplaçant dans un fluide visqueux, la force de portance et la force de trainée sont toutes deux non nulles.

Formule **empiriques**:

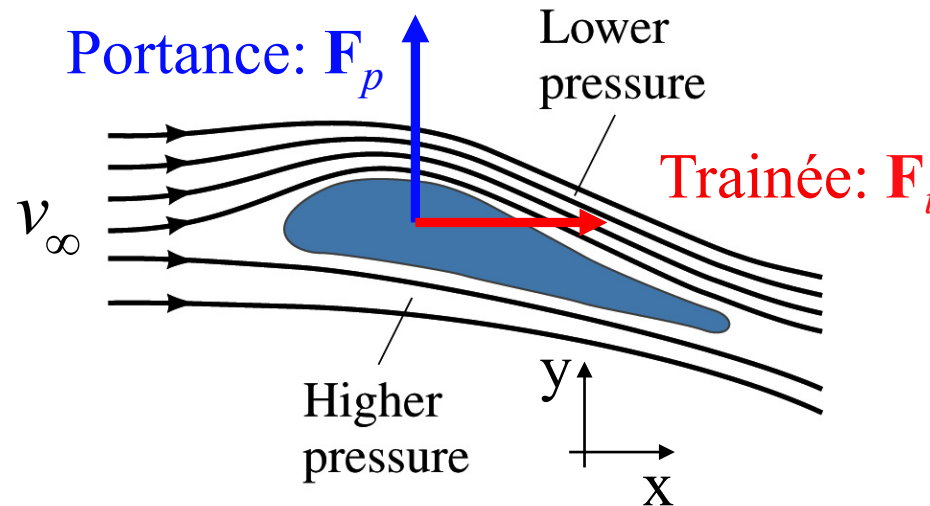
$$\text{Force de portance: } \vec{F}_p = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S C_y \vec{e}_y$$

C_y : coefficient de portance

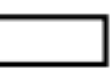
$$\text{Force de trainée: } \vec{F}_t = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S C_x \vec{e}_x$$

C_x : coefficient de trainée

C_x et C_y à déterminée par simulation et/ou essais en tunnel
(eventuellement avec des modeles reduits).



C_x : coefficient de trainée
(drag coefficient)

Shape		Drag Coefficient
Sphere	→ 	0.47
Half-sphere	→ 	0.42
Cone	→ 	0.50
Cube	→ 	1.05
Angled Cube	→ 	0.80
Long Cylinder	→ 	0.82
Short Cylinder	→ 	1.15
Streamlined Body	→ 	0.04
Streamlined Half-body	→ 	0.09
Measured Drag Coefficients		

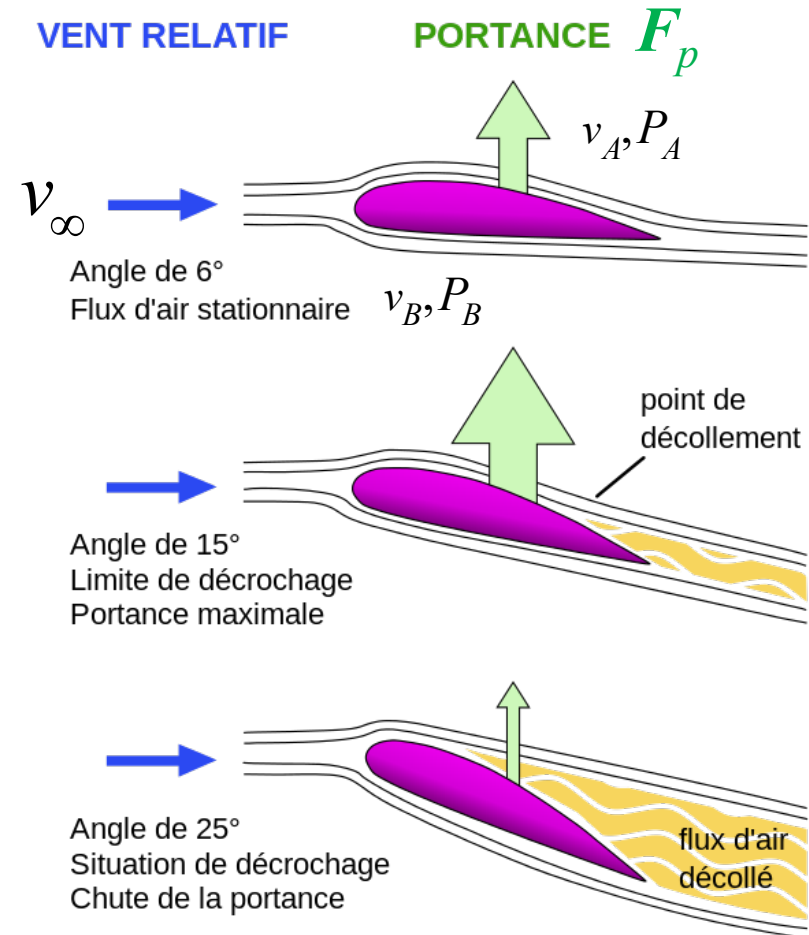
Pour Bernoulli: $v_A > v_B \Rightarrow P_A < P_B \Rightarrow$

Force dirigée perpendiculairement au déplacement de l'aile,
vers l'haut (force de portance $\vec{F}_p$).

Dans la réalité, des tourbillons peuvent se détacher de l'aile, avec perte de force de portance. La loi de Bernoulli pour le calcul de la portance reste approx. valable même pour un vrai fluide visqueux si les phénomènes de turbulence sont très limités.

Le **décrochage** est la perte de portance d'une structure portante (aile, pale de rotor, voile) dû à un angle d'incidence trop important. Dans cette circonstance, l'avion n'est plus suffisamment soutenu par l'air pour maintenir son altitude, et risque la perte de contrôle.

Selon les paramètres: vitesse, surface de l'aile, et angle d'attaque.....



Bikes



Upright:
 $A = 5.5 \text{ ft}^2 = 0.51 \text{ m}^2$
 $C_D = 1.1$



Racing:
 $A = 3.9 \text{ ft}^2 = 0.36 \text{ m}^2$
 $C_D = 0.9$

 $C_D = 0.9$

 $C_D = 0.5$


Drafting:
 $A = 3.9 \text{ ft}^2 = 0.36 \text{ m}^2$
 $C_D = 0.50$



With fairing:
 $A = 5.0 \text{ ft}^2 = 0.46 \text{ m}^2$
 $C_D = 0.12$

Automotive, A = frontal area



Minivan:
 $C_D = 0.4$



Passenger car
 or sports car:
 $C_D = 0.3$



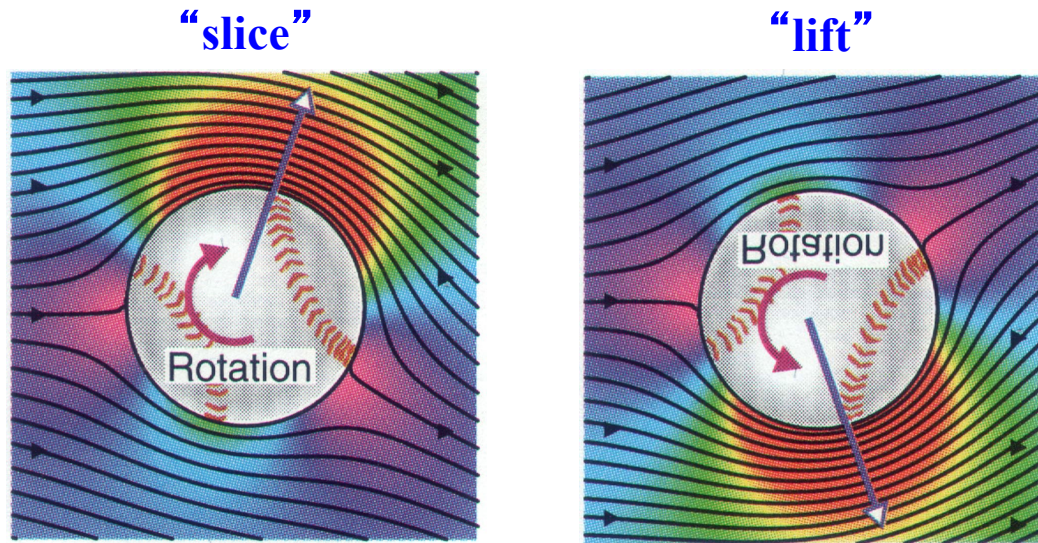
$$C_D \triangleq C_x$$

coefficient de trainée
 (drag coefficient)

L'effet Magnus

$$P < P$$

$$v > v$$



V_{balle}

Force de portance
(lift)

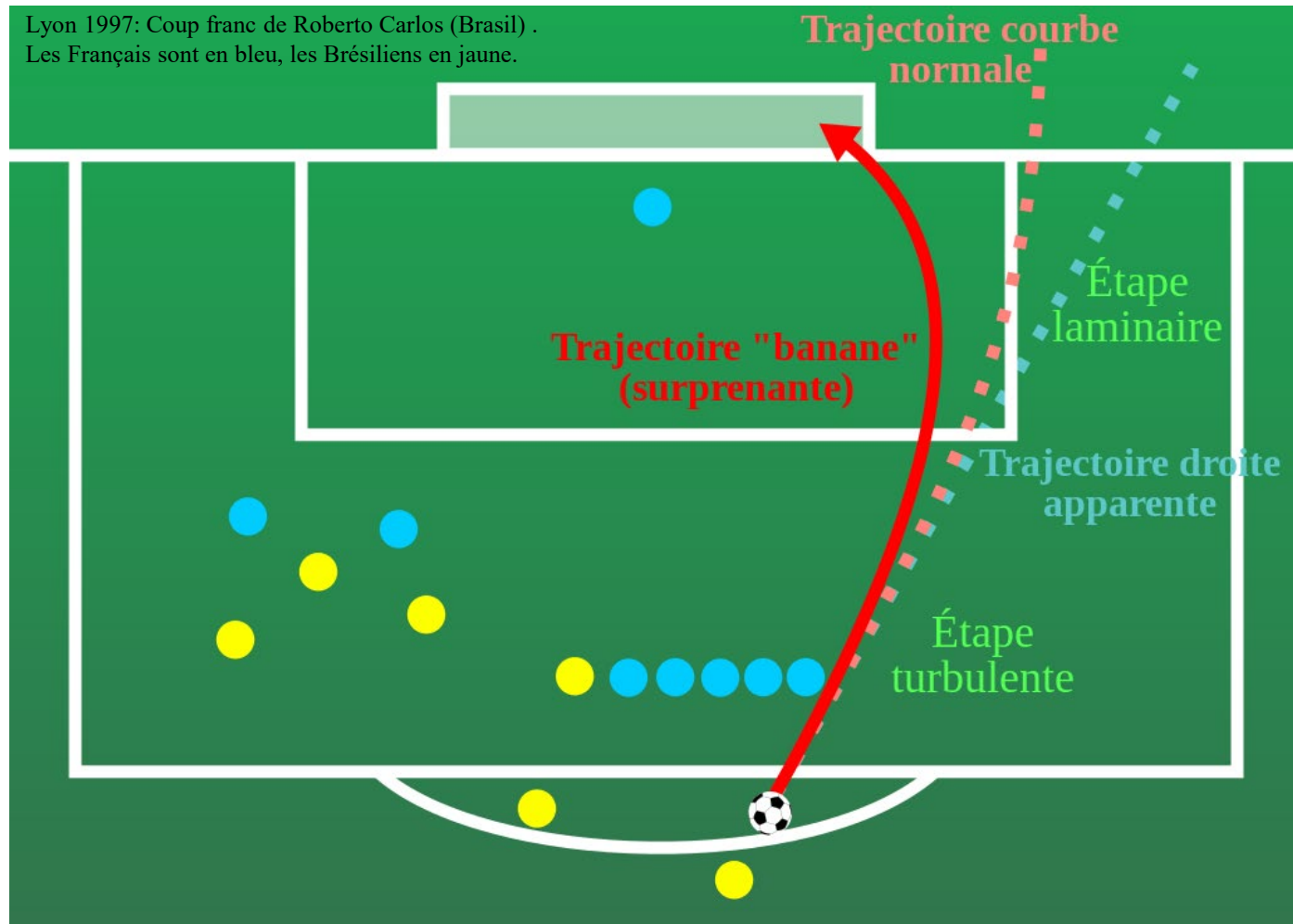
Force de traînée
(drag)

La rotation d'un objet placé dans un vent relatif (l'objet se déplace par rapport à l'air ou l'air se déplace par rapport à l'objet) modifie **asymétriquement** le champ des vitesses autour de l'objet.

L'effet Magnus est responsable des trajectoires «non standard» des balles de tennis et de football lorsqu'elles sont en rotation.

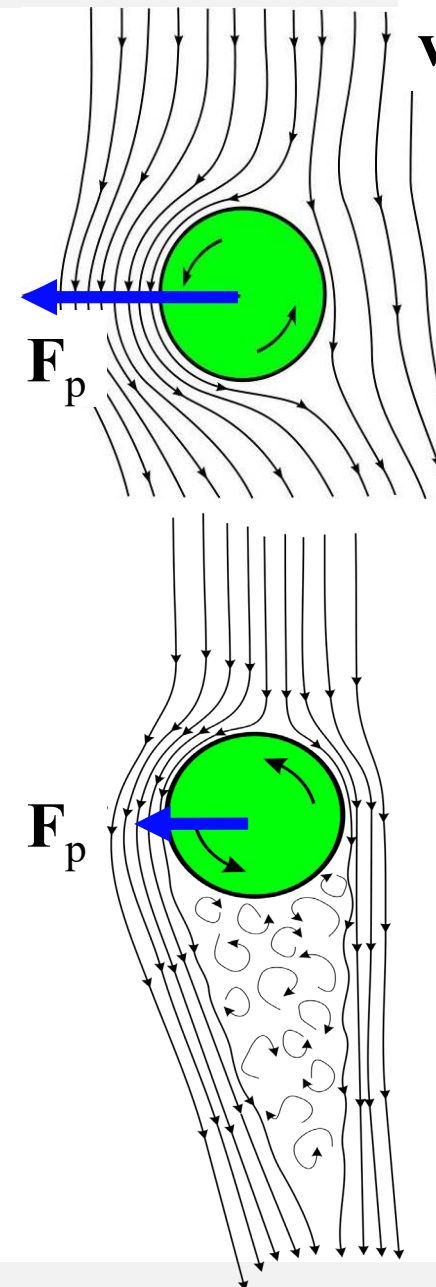
Note: L'effet Magnus n'existe pas pour un fluide parfait à viscosité nulle !!

L'effet Magnus avec transition laminaire/turbulente

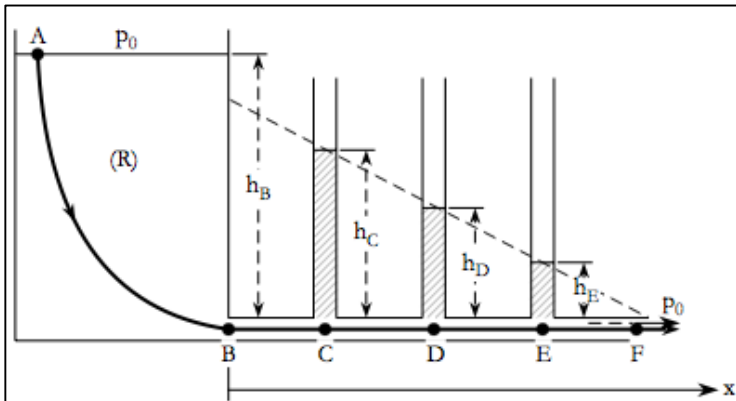


Cette trajectoire peut s'expliquer par l'action simultanée de **deux** effets physiques :

- L'effet Magnus
- L'écoulement de l'air laminaire ou turbulent en fonction du nombre de Reynolds (donc de la vitesse pour une viscosité fixée)

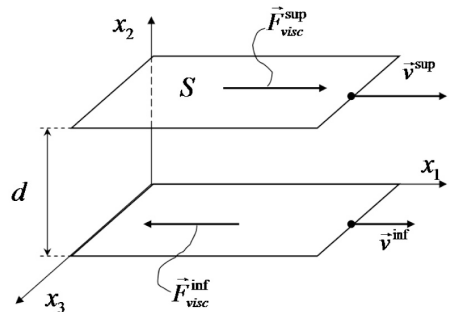


Viscosité: constatations expérimentales



Expérimental: Chute de pression dans une conduite horizontale. Le fluide perd de l'énergie lors de son mouvement.

Théorie (Bernoulli): $z=\text{const}$; $v=\text{const} \rightarrow P=\text{const}$



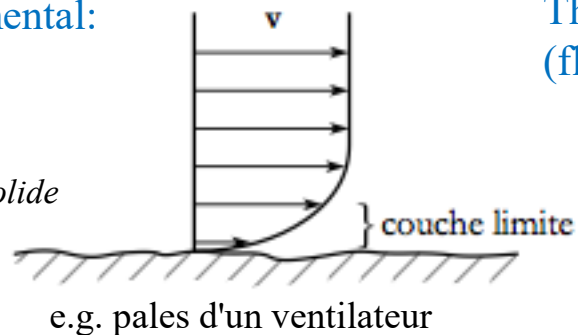
Expérimental: Faire glisser deux plaques parallèles entourant un fluide nécessite l'application d'une force tangente aux plaques (force de résistance au cisaillement du fluide).

Théorie (fluide parfait): Aucune force tangente aux plaques serait nécessaire.

Il existe des forces de résistance au cisaillement, dit forces de viscosité

Expérimental:

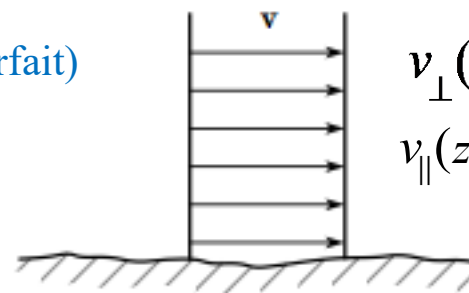
$$\vec{v}(z=0) = \vec{v}_{solide}$$



Théorie (fluide parfait)

$$v_{\perp}(z=0) = 0$$

$$v_{\parallel}(z=0) \neq \vec{v}_{solide}$$



Viscosité: importance

La viscosité peut être considérée comme «l'adhésivité interne d'un fluide».

La viscosité influence la **puissance nécessaire pour déplacer** un profil aérodynamique dans l'atmosphère.

La viscosité explique les **pertes d'énergie** associées au transport de fluides dans les conduits, les canaux, et les tuyaux.

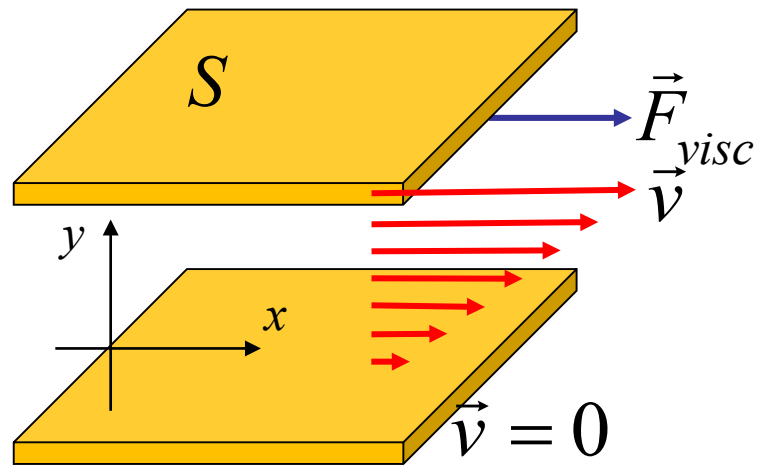
La viscosité joue un rôle primordial dans la **génération de turbulences**.

Note: la viscosité traduit le lien entre la contrainte de cisaillement et le gradient transversal de la vitesse d'écoulement dans la matière. La viscosité est en fait une quantité tensorielle mais il est possible, dans certains cas, de l'exprimer sous la forme d'une grandeur scalaire.

Viscosité: mesure et «définition»

La viscosité d'un fluide exprime sa résistance aux écoulements de cisaillement, où les couches adjacentes se déplacent parallèlement les unes aux autres avec des vitesses différentes.

Il peut être défini à travers la situation idéalisée connue sous le nom de flux de Couette, où une couche de fluide est piégée entre deux plaques horizontales, une fixe ($v=0$) et l'autre se déplaçant horizontalement à vitesse constante v . Les plaques sont supposées être très grandes, de sorte qu'il n'est pas nécessaire de considérer ce qui se passe près de leurs bords.



$$\vec{F}_{visc} = \eta S \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_x$$

Force de viscosité sur la surface S [N]

$$[\eta] = \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1} = \text{Nm}^{-2}\text{s} = \text{Pa s}$$

Expérimentalement, nous déplaçons la plaque à une vitesse connue et nous mesurons la force nécessaire. Nous déterminons la viscosité en supposant un profil linéaire pour la vitesse.

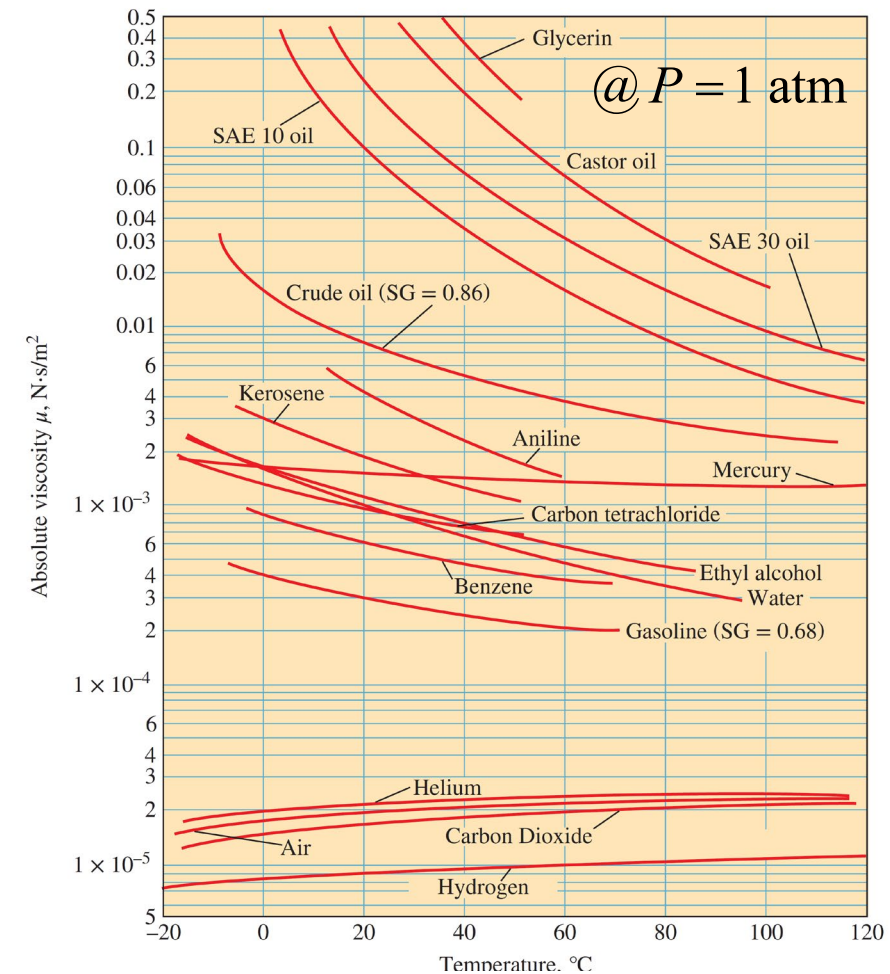
Si la vitesse de la plaque supérieure est suffisamment basse, les particules de fluide se déplaceront parallèlement à celle-ci et leur vitesse variera linéairement de zéro en bas à v en haut (profil linéaire).

	η (Pa s)
air (40° C)	1.8×10^{-5}
eau (20° C)	1×10^{-3}
100° C)	0.28×10^{-3}
glycérine (20° C)	1.5
miel (20° C)	10
bitume (20° C)	10^8

Pour certains fluides, la viscosité est une constante sur une large gamme de taux de cisaillement (fluides newtoniens).

Les fluides sans viscosité constante (fluides non newtoniens) ne peuvent être décrits par une seule valeur de viscosité.

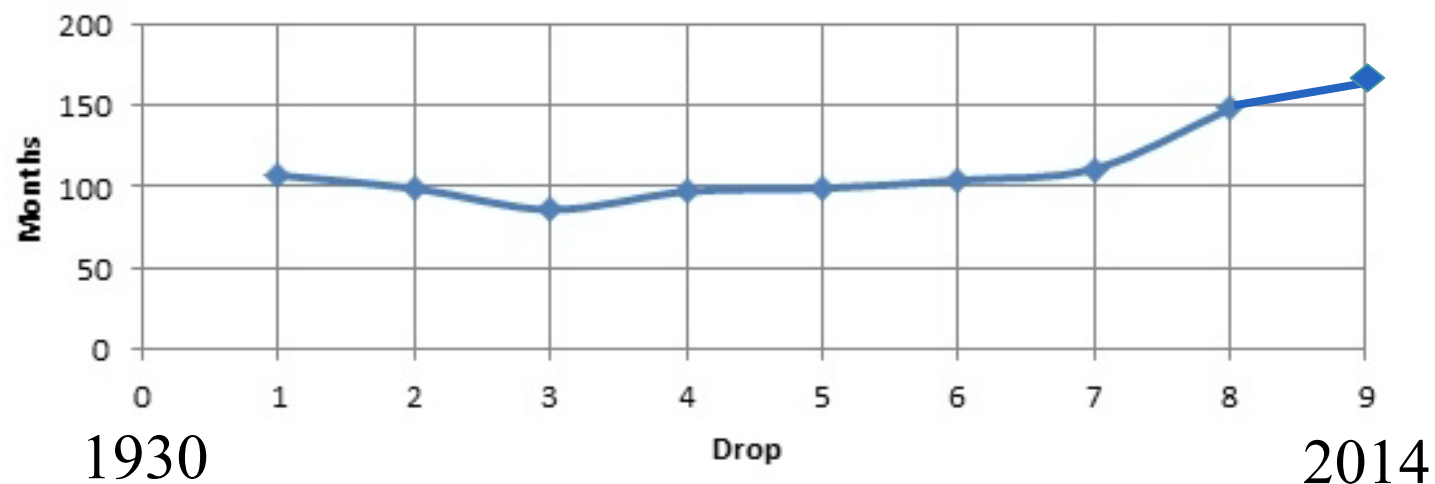
	gaz	liquides
$\frac{\partial \eta}{\partial T}$	> 0	< 0



Exemple de fluide très visqueux: le bitume



Months between drops



Viscosité du bitume :
230 milliards ($2,3 \times 10^{11}$) de fois celle de l'eau
(le bitume c'est l'un des fluides les plus visqueux)

Cette expérience a commencé en Australie en 1930.
Seulement **9 gouttes** sont tombées depuis 1927, la dernière en 2014.
La prochaine tombera probablement en 2027.

Regardez l'expérience «en direct»:
<http://thetenthwatch.com/feed/>

Force de viscosité sur un volume dV

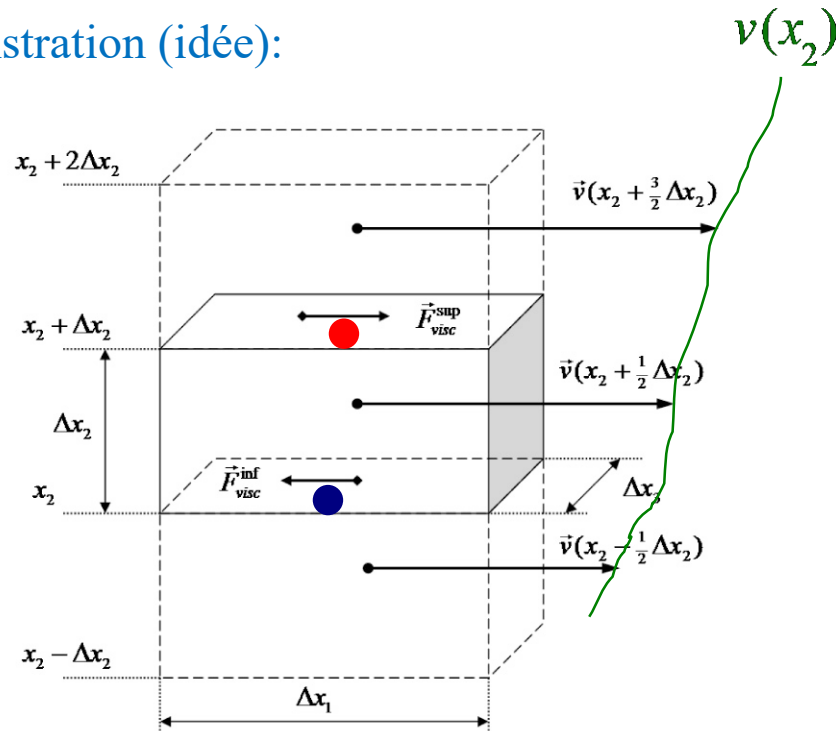
$$\vec{F}_{visc} = \eta \nabla^2 \vec{v} dV$$

Force de viscosité sur un volume dV [N]

$$\vec{f}_{visc} = \eta \nabla^2 \vec{v}$$

Force de viscosité par unité de volume [N/m³]

Démonstration (idée):



$$\bullet \quad \vec{F}_{visc}^{sup} = \eta \Delta x_1 \Delta x_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_2 + \Delta x_2) \vec{e}_1$$

$$\bullet \quad \vec{F}_{visc}^{inf} = -\eta \Delta x_1 \Delta x_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_2) \vec{e}_1$$

$$\langle \vec{F}_{visc} \rangle = \eta \Delta x_1 \Delta x_3 \Delta x_2 \frac{1}{\Delta x_2} \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_2 + \Delta x_2) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_2) \right] \vec{e}_1$$

$$\vec{F}_{visc} = \eta \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \vec{e}_1 dV \dots\dots\dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Laplacian of Scalar field:} \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \text{Laplacian of Vector field:} \quad \nabla^2 \vec{A} = (\nabla^2 A_x, \nabla^2 A_y, \nabla^2 A_z) = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \end{array} \right.$$

“Equation d'Euler avec viscosité”: Equation de Navier-Stokes

$$-\nabla P + \rho \vec{g} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \forall t, \forall x$$

Equation
d'Euler

$$-\nabla P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \forall t, \forall x$$

Equation de
Navier-Stokes

Note: Bilan de forces

Force de **pression**
(par unité de volume)

Force de **viscosité**
(par unité de volume)

Force de **gravité**
(par unité de volume)

Force **totale** $\mathbf{F=ma}$
(par unité de volume)

$$-\nabla P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Tout comme l'équation d'Euler, l'équation de Navier-Stokes représente également le **bilan des forces** dans un élément de volume infinitésimal.

Equation de Navier-Stokes pour le fluides visqueux incompressible

$$-\nabla P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \forall t, \forall x$$

Fluides incompressible:

$$\rho = \text{const} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Conditions aux limites (experimental): $\vec{v} - \vec{v}_{solide} = 0$

- 4 fonctions (P, v_x, v_y, v_z) en 4 variables (t, x, y, z)
- 4 équations

Equation de
Navier-Stokes
(pour fluides
incompressible)

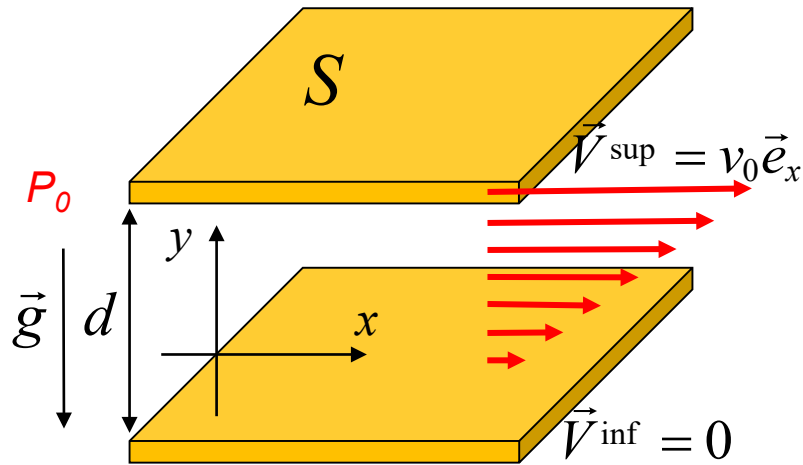
Note: Math.: $\nabla^2 \vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) \Rightarrow$

Si l'écoulement est irrotationnel ($\nabla \times \vec{v} = 0$) et le fluide est incompressible ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$) $\Rightarrow \nabla^2 \vec{v} = 0 \Rightarrow \eta \nabla^2 \vec{v} = 0 \quad \forall \eta$

Dans le cas d'un écoulement irrotationnel d'un fluide incompressible, la force de viscosité est nulle.

Exemple d'application de l'équation de Navier-Stokes:

Ecoulement entre plaques parallèles (écoulement de Couette plan)



Hypotheses:

Vitesse des plaques:

plaque supérieure: $\vec{V}^{\text{sup}} = v_0 \vec{e}_x$; plaque inférieure: $\vec{V}^{\text{inf}} = 0$

Fluide visqueux incompressible:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \rho = \text{const}, \vec{v} - \vec{v}_{\text{solide}} = 0$$

Condition stationnaire:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

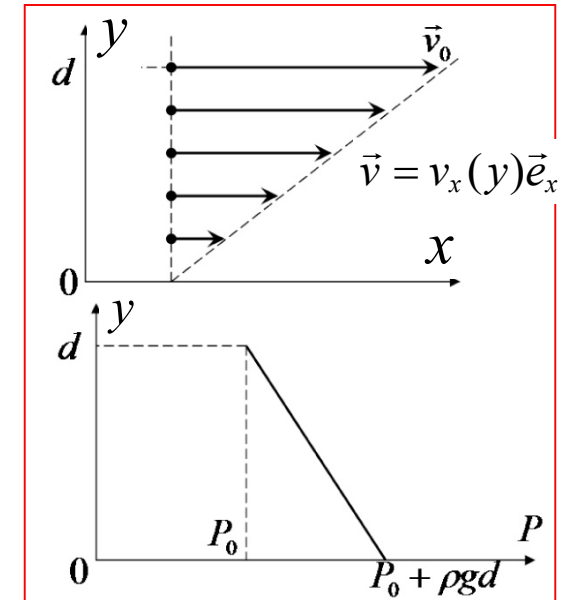
Pression constante selon x:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\begin{cases} \vec{v}(y=0) = 0, \vec{v}(y=d) = v_0 \vec{e}_x \\ \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

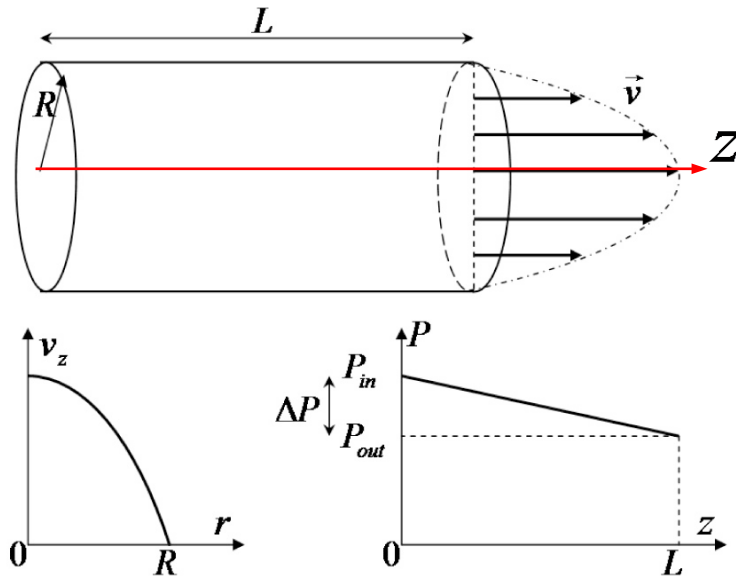
$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = -\nabla P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial P}{\partial y} \vec{e}_y - \rho g \vec{e}_y + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{e}_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \\ \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = -\rho g y + c \\ v_x(y) = a + by \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = P_0 + \rho g(d - y) \\ v_x(y) = \frac{v_0}{d} y \end{cases}$$



Exemple d'application de l'équation de Navier-Stokes:

Ecoulement dans un tube cylindrique (écoulement de Poiseuille)



Hypotheses:

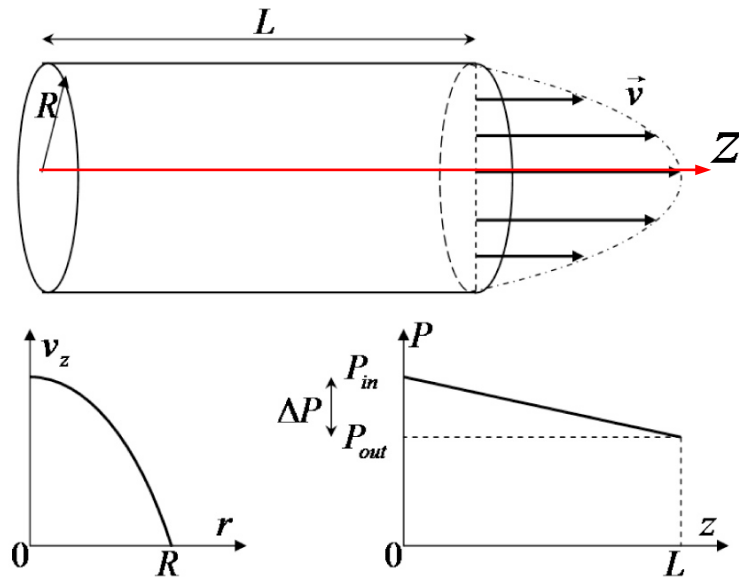
$$\begin{cases} P(z=0)=P_{in} ; P(z=L)=P_{out} \\ \vec{v}=v_z(r)\vec{e}_z & \text{(continuité)} \\ g=0 & \text{(pesanteur négligiable)} \\ \frac{d\vec{v}}{dt}=0 & \text{(mouvement rectiligne uniforme)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = -\nabla P + \eta \nabla^2 \vec{v} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{e}_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} = 0; \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0; \frac{\partial P}{\partial z} = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \Rightarrow \text{mais } v_z = v(r, \mathbb{X}) \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial v_z}{\partial r}(r, \mathbb{X}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = c \Rightarrow P(z) = P_{in} - \frac{P_{in} - P_{out}}{L} z = P_{in} - \frac{\Delta P}{L} z; \quad c = -\frac{\Delta P}{L}$$



$$\begin{aligned} \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) &= c \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) &= \frac{1}{\eta} c r \Rightarrow \\ r \frac{\partial v_z}{\partial r} &= \frac{1}{2\eta} c r^2 + b \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{2\eta} c r + \frac{b}{r} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_z &= \frac{1}{4\eta} c r^2 + b \ln r + d \quad \text{avec } c = -\frac{\Delta P}{L} \end{aligned}$$

On veut une solution non singulière sur l'axe (i.e., pour $r=0$)

$$\Rightarrow b = 0$$

La condition $v_z(R)=0$

$$\Rightarrow d = -\frac{c}{4\eta} R^2$$

$$\Rightarrow v_z(r) = \frac{P_{in} - P_{out}}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad \text{Profil de Poiseuille}$$

$$D = \int_0^R v_z 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) r dr = \frac{\Delta P}{\eta L} \frac{\pi}{8} R^4$$

D: Débit Volumique
[m³/s]

$$\Delta P = \frac{8\eta L D}{\pi R^4}$$

Loi de Poiseuille

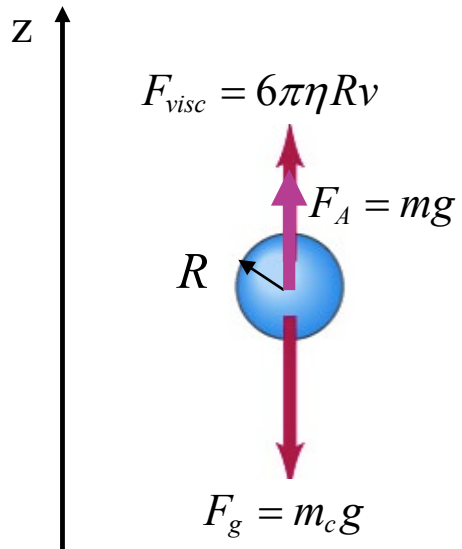
Note 1: $v_{z,\max} = \frac{\Delta P}{4\eta L} R^2 = \frac{R^2}{4\eta} \frac{\partial P}{\partial z}$

Note 2: Fluide parfait: $D \propto R^2$ Fluide avec viscosité: $D \propto R^4$

Note 3: Analogie avec la loi de Ohm. $\Delta V = RI$; $\Delta V \leftrightarrow \Delta P$; $I \leftrightarrow D$; $R \leftrightarrow \frac{8\eta L}{\pi R^4}$

Exemple d'application de l'équation de Navier-Stokes:

Sphère à (très) faible vitesse dans fluide visqueux



Loi de Stokes: $\vec{F}_{visc} = -6\pi\eta R\vec{v}$ (valable pour $\mathcal{R} < 1$)

(Force de trainée sur une sphere calculée à partir de l'équation de Navier-Stokes $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v}$ pour un flux incompressible stationnaire à faible vitesse, sans démonstration)

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_A + \vec{F}_{visc}$$

$$m_c \dot{\vec{v}} = m_c \vec{g} - m \vec{g} - 6\pi\eta R \vec{v}$$

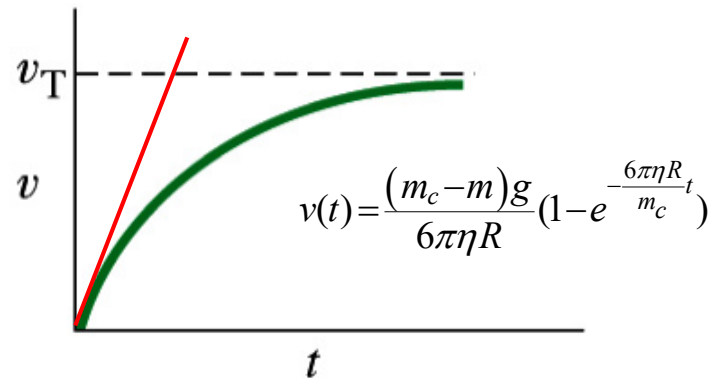
$$m_c \dot{\vec{v}} = (m_c - m) \vec{g} - 6\pi\eta R \vec{v} \quad \vec{v} = -v \vec{e}_z;$$

$$m_c \dot{v} = -(m_c - m)g + 6\pi\eta R v$$

m_c : masse de la sphère
 m : masse du fluide déplacé

$$\dot{v} = 0 \Rightarrow v = v_T = \frac{(m_c - m)g}{6\pi\eta R} = \frac{2(\rho_c - \rho)gR^2}{9\eta}$$

Vitesse «limite»



Cette loi est utilisée pour:

- 1) calculer la vitesse de sédimentation
- 2) mesurer les viscosités des liquides

Note 1. $\vec{F}_{visc} \propto v$ est correct pour nombre de Reynolds < 1 (fluide visqueux, petites particules, faible vitesse).

Note 2. Pour la chute libre d'un homme dans l'air dans l'air: $\vec{F}_{visc} \propto v^2$ et $v_T \sim 300$ km/h !!

Similarité et nombre de Reynolds

Il est très difficile de résoudre les équations de Navier-Stokes
(mis à part les quelques cas, e.g., l'écoulement de Poiseuille)

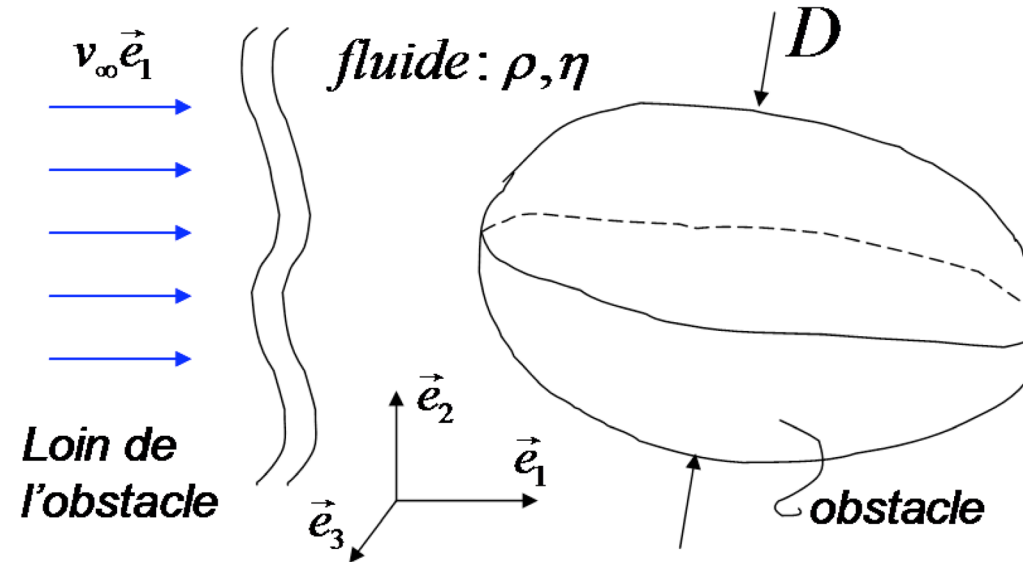
→ Approche expérimentale, souvent avec des modèles réduits.

Exemple: On aimerait connaître l'écoulement de l'air et les forces exercées par l'air sur un avion (portance, trainée, ...). L'approche expérimentale consiste à construire un modèle réduit de l'avion et à effectuer des mesures dans un tunnel d'essais aérodynamique.

La question est:

Comment l'écoulement autour du modèle réduit peut-il me renseigner sur l'écoulement autour de l'objet en grandeur nature ?

Ecoulement d'un fluide visqueux incompressible autour d'un obstacle solide fixe de forme donnée et d'orientation donnée



Parametres :

v_∞ : vitesse du fluide loin de l'obstacle (i.e., l'objet à étudier)

ρ : densité du fluide

η : viscosité du fluide

D : taille, forme, et orientation de l'obstacle

On peut démontrer que on peut réécrire l'équation de Navier-Stokes avec un seul paramètre, le **nombre de Reynolds**:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v} \quad \forall t, \forall x$$

$\Rightarrow$

Une «seule» inconnue: le champ des vitesses $\vec{v}$
Un seul paramètre: le nombre de Reynolds

$$\frac{d\vec{T}'}{dt'} + \nabla' \times (\vec{T}' \times \vec{v}') = \frac{1}{\Re} \nabla'^2 \vec{T}'$$

Conditions aux limites:

$\vec{v}' = 0$ à la surface de l'objet

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \vec{v}' = \vec{e}_1$$

avec

Nombre de Reynolds

$$\Re = \frac{\rho D v_{\infty}}{\eta}$$

Vecteur tourbillon

$$\nabla' = \frac{1}{D} \nabla; \quad \vec{T}' = \frac{D}{v_{\infty}} \vec{T} = \frac{D}{v_{\infty}} \nabla \times \vec{v}; \quad \vec{v}' = \frac{1}{v_{\infty}} \vec{v}; \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{D}{v_{\infty}} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{\rho D v_{\infty}}{\eta}$$

Le nombre de Reynolds est une valeur sans dimension qui mesure le rapport des **forces d'inertie** aux **forces visqueuses** et décrit le degré d'écoulement **laminaire** ou **turbulent**. Les systèmes qui fonctionnent dans le même nombre de Reynolds auront les mêmes caractéristiques d'écoulement, même si le fluide, la vitesse et longueurs caractéristiques varient.

	Reynolds number
A large whale swimming at 10 m/s	300,000,000
A tuna swimming at the same speed	30,000,000
A duck flying at 20 m/s	300,000
A large dragon fly going 7 m/s	30,000
A copepod in a speed burst of 0.2 m/s	300
Flapping wings of the smallest flying insects	30
An invertebrate larva, 0.3 mm long, at 1 mm/s	0.3
A sea urchin sperm advancing the species at 0.2 mm/s	0.03
A bacterium, swimming at 0.01 mm/s	0.00001

“The Reynolds number is the most well known and useful dimensionless parameter in all of fluid mechanics”

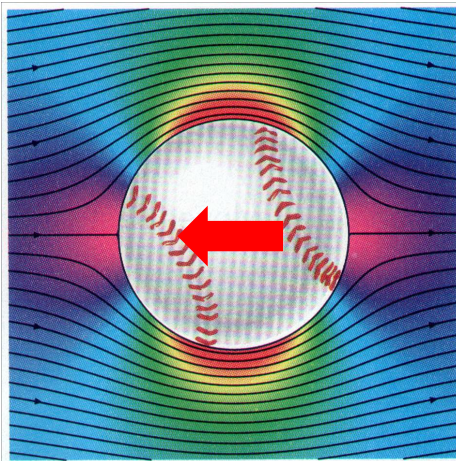
Exemple: voiture ou homme en chute libre dans l'air a pression atmosphérique:

$$\eta \cong 10^{-5} \text{ Pas}, \rho_{\text{air}} \cong 1 \text{ kg/m}^3, D \cong 1 \text{ m}, v_{\infty} \cong 30 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{R} \cong 10^6$$

La nature de l'écoulement est entièrement définie par le **nombre de Reynolds**

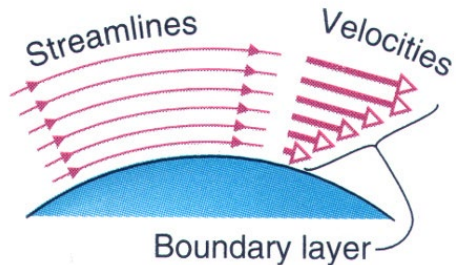
$$\mathcal{R} < 1000$$



Laminaire:

Trainée de pression: zéro

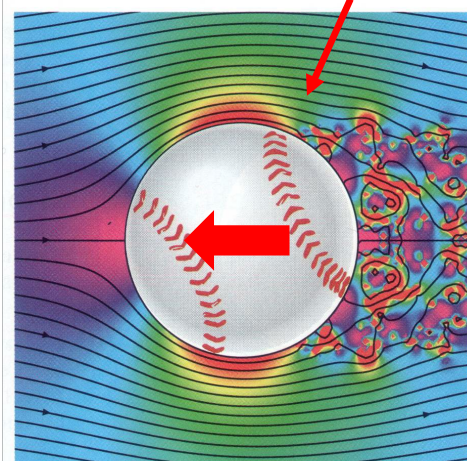
Trainée de viscosité: grand



Couche limite laminaire

Instabilité de la couche limite

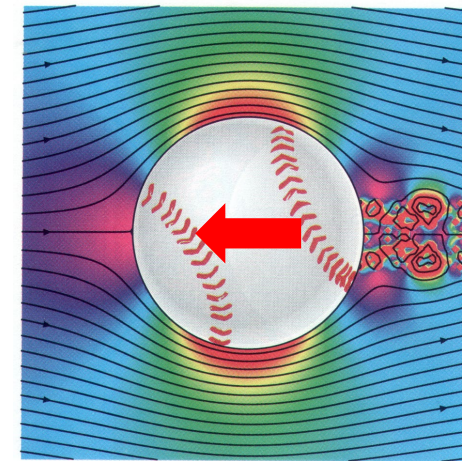
$$\mathcal{R} > 100000$$



Turbulent:

Trainée de pression: grand

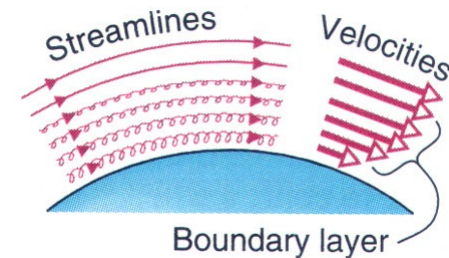
Trainée de viscosité: grand



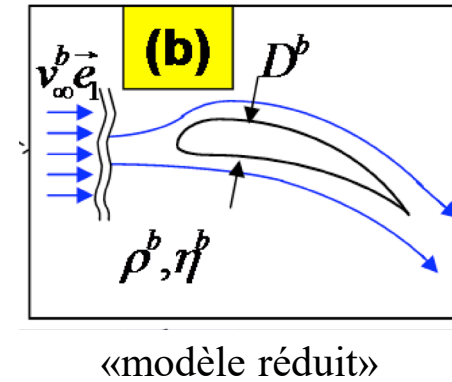
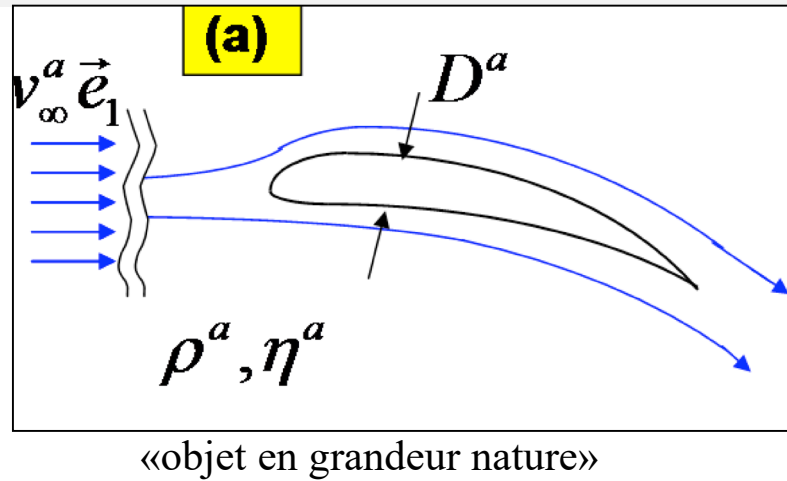
Turbulent:

Trainée de pression: plus faible

Trainée de viscosité: grand



Couche limite turbulente



Si on choisit les paramètres de l'écoulement du «modèle réduit (b)» de telle sorte qu'il ait le **même nombre de Reynolds** que l'écoulement de l'«objet grandeur nature (a)», i.e.,

$$\mathfrak{R}^a = \mathfrak{R}^b \Leftrightarrow \frac{\rho^b D^b v_\infty^b}{\eta^b} = \frac{\rho^a D^a v_\infty^a}{\eta^a}$$

alors les écoulements (a) et (b) sont **similaires**.

En particulier, si les écoulements sont similaires (i.e., même nombre de Reynolds) nous pouvons prouver que les forces mesurée sur le «modèle réduit (b)» sont utilisable pour obtenir les forces sur l'«objet en grandeur nature (a)» avec l'équation suivante:

$$\vec{F}^a = \frac{\rho^a (v_\infty^a)^2 (D^a)^2}{\rho^b (v_\infty^b)^2 (D^b)^2} \vec{F}^b$$

Exemples de «modèles réduits»

Dans le cas d'un mobile (avion, véhicule, ...), on considère que l'effet de l'air en mouvement sur le modèle à l'arrêt est le même que sur le modèle en mouvement dans une masse d'air fixe. Pour avoir des résultats d'essais valables, il faut suivre la loi de similitude qui demande de conserver le nombre de Reynolds.

Exemple: Modèle réduit d'un facteur 10 dans l'air à pression atmosphérique

$$\text{(i.e., } \frac{D^a}{D^b} = 10, \rho^b = \rho^a, \eta^b = \eta^a)$$

dans les mêmes conditions de nombre de Reynolds

$$\text{(i.e., } \frac{\rho^b D^b v_\infty^b}{\eta^b} = \frac{\rho^a D^a v_\infty^a}{\eta^a}) \Rightarrow v_\infty^b = 10 v_\infty^a \quad \text{et} \quad \vec{F}^a = \frac{\rho^a (v_\infty^a)^2 (D^a)^2}{\rho^b (v_\infty^b)^2 (D^b)^2} \vec{F}^b = \vec{F}^b$$

Note: Si nous réduisons la taille par un facteur 10 mais la viscosité et la densité sont les mêmes nous devons augmenter la vitesse du fluide par un facteur 10 pour obtenir le même nombre de Reynolds, la même ligne de vitesse (et la même force). Pas facile, si la vitesse de l'objet en taille naturelle est grande. Dans ces cas, on peut augmenter la densité en augmentant la pression d'air dans la soufflerie (soufflerie pressurisée) ou en diminuant la température de l'air (soufflerie cryogénique), ou les deux. Si cela ne suffit pas, des mesures peuvent être effectuées à différentes vitesses inférieures et les valeurs à vitesses plus élevées sont extrapolées à partir de ces mesures (voir C 326).

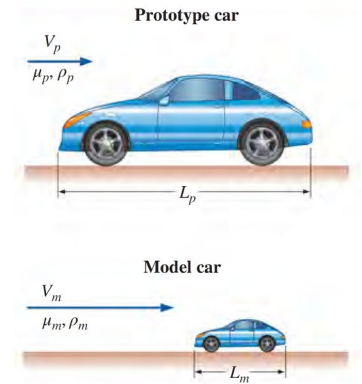


FIGURE 7-17
Geometric similarity between a prototype car of length L_p and a model car of length L_m .

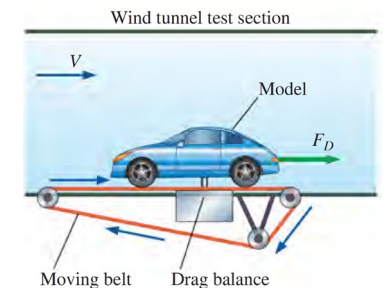


FIGURE 7-19
A drag balance is a device used in a wind tunnel to measure the aerodynamic drag of a body. When testing automobile models, a moving belt is often added to the floor of the wind tunnel to simulate the moving ground (from the car's frame of reference).

La physique des fluides (en bref)

Equation de **continuité** (fluides avec conservation de la masse....la plupart des fluides !!)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

«Conservation de la masse»

Equation de **Navier-Stokes** (fluides avec viscosité non-nulle)

$$-\nabla P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}$$

«F=ma»

Equation d'**Euler** (fluides parfaits)

$$-\nabla P + \rho \vec{g} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}$$

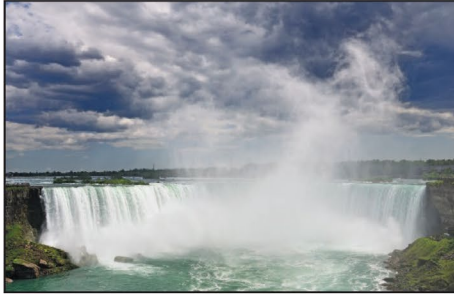
«F=ma»

Equation de **Bernoulli** (fluides parfaits et incompressible en écoulement stationnaire dans champ gravitationnelle constant)

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P = \text{const}$$

«Conservation de l'énergie»

La mécanique des fluides: applications



Natural flows and weather

© Jochen Schlenker/Getty Images RF



Boats

© Doug Menuez/Getty Images RF



Aircraft and spacecraft

© Purestock/SuperStock/RF



Power plants

U.S. Nuclear Regulatory Commission (NRC)



Human body

© Jose Luis Pelaez Inc/Blend Images LLC RF



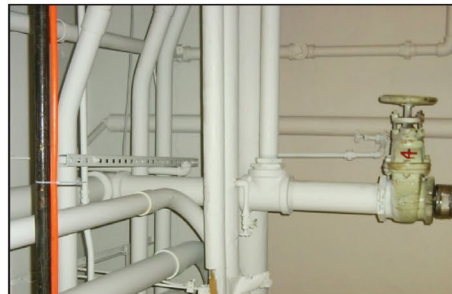
Cars

© Ingram Publishing RF



Wind turbines

© Mlenny Photography/Getty Images RF



Piping and plumbing systems

Photo by John M. Cimbala



Industrial applications

© 123RF

La mécanique des fluides à l'échelle micro-nanométrique:

La micro-nano fluidique

